Оригинальная статья / Original article
УДК 622.24.05:519
DOI: http://dx.doi.org/10.21285/2686-9993-2020-43-1-88-95

Математическое программирование в задачах оптимизации процессов бурения скважин

© А.И. Ламбин[a]
[a]Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия

Резюме: Оптимизационные задачи, решаемые средствами линейного программирования, представляются в виде равенств или неравенств, а функция цели линейна. Методы линейного программирования широко распространены при решении задач техники, пищевой отрасли, химической индустрии. Эта распространенность объясняется доступностью математического обеспечения для решения задач линейного программирования большой размерности и возможностью их анализа при вариации исходных данных. Построение модели линейного программирования включает такие части, как определение переменных задачи, составление ограничений в виде неравенств и представление цели решения в виде линейной функции. В статье дано описание математической постановки задачи и представлена конкретная реализация этого описания на примере так называемых смесевых задач. В данном случае смесью является буровой раствор, технологическое качество которого зависит от входящих в него ингредиентов, стоимость его приготовления должна быть минимальной. Построение модели задачи осуществлялось путем решения ее графоаналитическим методом с привлечением программного кода построения графиков и специального кода решения задач линейного программирования среды MATLAB. Произведен анализ решения задачи, рассмотрены пути улучшения решения путем реорганизации состава смеси.

Ключевые слова: ограничения, функция цели, модель задачи, область допустимых решений

Информация о статье: Дата поступления 11 декабря 2019 г.; дата принятия к печати 05 февраля 2020 г.; дата онлайн-размещения 30 марта 2020 г.

Для цитирования: Ламбин А.И. Математическое программирование в задачах оптимизации процессов бурения скважин. *Науки о Земле и недропользование.* 2020. Т. 43. № 1. С. 88–95. https://doi.org/10.21285/2686-9993-2020-43-1-88-95

Mathematical programming for process optimization problems in well drilling

© Anatoly I. Lambin[a]
[a]Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

Abstract: Optimization problems solved by means of linear programming are presented in the form of equalities or inequalities, the target function being linear. Linear programming methods are widely used in solving problems for engineering, food industry, and chemical industry. This prevalence is due to the availability of the software for solving high-dimensionality linear programming problems and the possibility to analyze the problems when varying the source data. Constructing a linear programming model includes determining the variables of the problem, setting constraints in the form of inequalities, and representing the solution objective as a linear function. The article presents the description of the problem's' mathematical formulation and the specific realization of the description for the so-called 'mixture' problems: the mixture is the drilling mud, its technological quality being a function of the ingredients, and the preparation cost should be minimal. The construction of the problem model is realized by solving it with the semigraphical method using a program code for graphing and a special code for solving linear programming problems in the MATLAB environment. The problem solution is analyzed, and the ways to improve the solution by reorganizing the mixture composition are suggested.

Keywords: constraints, target function, problem model, feasible region

Information about the article: Received December 11, 2019; accepted for publication February 05, 2020; available online March 30, 2020.

For citation: Lambin AI. Mathematical programming for process optimization problems in well drilling. *Earth sciences and subsoil use.* 2020;43(1):88–95. (In Russ.) https://doi.org/10.21285/2686-9993-2020-43-1-88-95

Введение

Большинство исследователей, занимаясь изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения, привлекают такую математическую дисциплину, как математическое программирование, а в наиболее простых случаях его раздел – линейное программирование [1].

Методы линейного программирования позволяют решать задачи оптимизации технологии производственных процессов. Линейное программирование – общепринятый термин от неточного перевода с английского «линейное планирование». В настоящее время аппарат линейного программирования хорошо разработан и широко освещен в литературе[1] [2, 3].

Известные методы этого аппарата все-таки достаточно сложны и трудоемки. Математически он основывается на таких предпосылках, как детерминированность (параметры модели могут быть оценены или известны точно), пропорциональность (эффекты влияния переменных пропорциональны их значениям), аддитивность (эффект влияния переменных задачи равен сумме эффектов каждой переменной). Вычислительные возможности компьютеров в этом плане позволяют упростить решение задач линейного программирования [4, 5].

Несмотря на распространенность линейного программирования при решении задач техники, пищевой отрасли, химической индустрии в области бурения скважин наблюдается отсутствие решения задач оптимизации методами линейного программирования. Целью данной статьи является общее описание постановки такого рода задач, конкретная реализация этого описания на примере так называемых смесевых задач.

Одной из распространенных технологических задач оптимизации является задача составления оптимальной смеси, которая применяется в таких областях, как производство минеральных удобрений, нефтепереработка, составление оптимальных рационов и диет. Композиции, составленные из материалов, должны обладать определенными свойствами и минимальной себестоимостью.

Трудно переоценить важность задач оптимизации, решение которых реализуется путем математического моделирования, то есть через формальное описание на математическом языке [6]. Математическая формулировка модели может быть достаточно сложной. Однако при первом приближении достаточно модели с линейными зависимостями между переменными, отображающими состояние реального объекта [7]. При таком приближении можно использовать методику линейного программирования, в которой линейная функция экстремума определяется на множестве также линейных ограничений в виде неравенств или равенств. Это множество ограничений в виде неравенств и равенств формирует выпуклое множество, которое отображается в выпуклый многогранник, в одной из его вершин и находится экстремум.

При математической постановке задач линейного программирования выделяют целевую функцию [8, 9] $f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, экстремум которой требуется определить при наличии ограничений в виде равенств или неравенств:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, i = 1,2, \ldots, m.$$

В матричной форме эти условия запишутся в следующей форме[2]:

$$c^T X \to extr, AX \le b.$$

Здесь A – матрица размера $m \times n$; b, c – вектор-столбцы.

При малом числе переменных задача решается графо-аналитически[3]. Для этого в прямоугольных координатах X, Y выстраиваются прямые, соответствующие каждому ограничению, сочетание которых образует так называемую

[1] Ашманов С.А. Линейное программирование: учеб. пособие. М.: Наука, 1981. 340 с.
[2] Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования: учеб. пособие. М.: Физматгиз, 1963. 276 с.
[3] Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач: учеб. пособие. М.: Физматлит, 2005. 128 с.

область допустимых решений в виде многоугольника. Градиент целевой функции определяет направление поиска вершины многоугольника, в которой находится экстремум целевой функции. Вычисление аргументов целевой функции, придающих ей экстремальное значение, осуществляется путем совместного решения уравнений прямых, пересекающихся в найденной вершине [10, 11].

Методы исследования

Пусть некая сервисная компания, реализующая услуги по разработке «Программы буровых растворов», решает задачу определения минимальной стоимости приготовления общего количества биополимерного раствора для проходки двух интервалов скважин с соответствующим содержанием ингредиентов. Методы исследования включают постановку задачи линейного программирования, решение ее графоаналитически и путем программного решения на компьютере, а также анализ полученного решения.

Для приготовления 1 м^3 раствора I (раствора для интервала I) было использовано: 0,2 % биополимера, 4 % ингибирующей добавки, 0,8 % полимера. Для приготовления раствора II (раствора для интервала II) – 0,4 % биополимера, 2 % ингибирующей добавки и 0,6 % полимера. Причем для проходки интервала I требуемый объем раствора в два раза превышал объем раствора, необходимого для интервала II.

Данные требуемого состава буровых растворов и ресурс ингредиентов приведены в табл. 1. Буровое предприятие не испытывает недостатка в ингибирующей добавке, хотя условно ограничило ресурс по этой добавке в 1000 кг.

Требуется определить затраты на приготовление общего количества бурового раствора, если стоимость приготовления 1 м^3 раствора I составляет 1952, а раствора II – 1384 руб.

Формулировка задачи осуществляется следующим образом.

Требуется найти минимум функции

$$F = 1952 \cdot x_1 + 1384 \cdot x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 105 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 245 \\ 40x_1 + 20x_2 \geq 1000, \\ x_1 = 2x_2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

где x_1 и x_2 – искомое количество бурового раствора, необходимое для проходки интервалов I и II, м^3. В табл. 1 ингредиенты приняты в процентах от объема, в ограничениях коэффициенты при неизвестных представляют весовые единицы, кг/м^3.

Матричная форма записи задачи представлена ниже [12]:

$$c^T X \to min, c = \begin{bmatrix} 1952 \\ 1384 \end{bmatrix} \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \\ 40 & 20 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 105 \\ 245 \\ 1000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1

Условия задачи

Table 1

Problem specification

Ингредиент	Состав бурового раствора, %		Ресурс, кг
	Раствор I	Раствор II	
Биополимер	0,2	0,4	105
Ингибирующая добавка	4	2	1000
Полимер	0,8	0,6	245
Стоимость 1 м^3 бурового раствора, руб.	1952	1384	–

Для графического решения построим на плоскости (x, y) четыре прямые, соответствующие ограничениям по трем ресурсам и ограничению по объемам раствора. Количество раствора для интервала II откладывается по оси x, для интервала I – по оси y. Построение прямых произведено в среде MATLAB, код программы построения ограничений показан на рис. 1, сам график представлен на рис. 2.

На рис. 2 показаны прямые, отображающие ограничения задачи и направление градиента целевой функции. Линия grad F означает направление наискорейшего изменения функции цели, а перпендикулярная ей линия при ее перемещении в область допустимых решений определяет положение оптимальной точки [13]. Так как в поиске минимум функции цели, указанный перпендикуляр перемещается в направлении антиградиента и он (перпендикуляр) будет сходить с области допустимых решений в точке a. В этой точке пересекаются линии $8x_1 + 6x_2 = 245$ и $40x_1 + 20x_2 = 1000$, решая совместно эти уравнения, находим $x_1 = 20$ и $x_2 = 10$. Найденные таким образом значения координат придают функции цели минимум, равный 52880 руб.

Таким образом, исходя из ресурса ингредиентов (см. табл. 1), для бурения в интервале I можно приготовить 20 м^3 раствора I и 10 м^3 раствора II для интервала II общей стоимостью 52880 руб.

```
y1=52.5-2·x;
y2=245/8-3/4·x;
y3=25-1/2·x;
x=1:0.2:30;
y4=2·x;
plot(x,y1,'.k',x,y2,'-r',x,y3,':b',x,y4,'c');
grid on
legend('2x1+4x2=105','8x1+6x2=245','40x1+20x2=1000','y=2x')
hold on
for c=0:30
 y=1384/1952·x
plot(x,y,'g');
grid on;
end
```

Рис. 1. Код программы построения прямых, отображающих ограничения
Fig. 1. Code of the program for constructing the lines representing the constraints

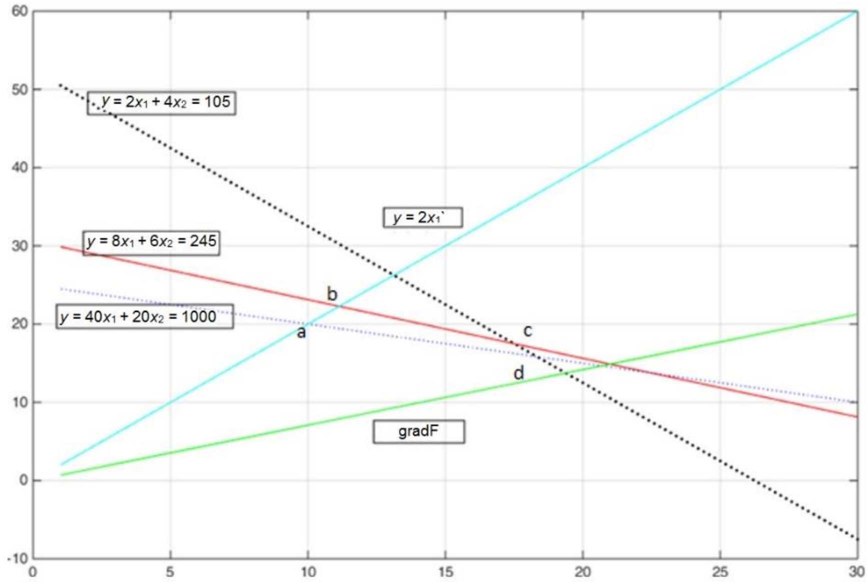

Рис. 2. Определение области допустимых решений
abcd – область допустимых решений
Fig. 2. Definition of the feasible region
abcd – feasible region

Очевидно, что программная среда MATLAB значительно упрощает построение графиков и их интерпретацию [14, 15].

Однако в среде MATLAB имеется команда linprog, позволяющая решать задачи линейного программирования. На рис. 3 представлен код программы linprog решения рассмотренной выше задачи. Из рис. 3 видно: составленный программный код выдал тот же результат, что и при решении задачи графоаналитическим методом, а именно: для интервала I скважины необходимо приготовить 10 м^3 бурового раствора и для интервала II из имеющегося ресурса можно приготовить 20 м^3 бурового раствора.

Необходимо отметить, что среда MATLAB является удобным инструментом при решении задач оптимизации, особенно при решении задач линейного программирования: составив основной код, можно подстраивать его под определенную задачу даже большой размерности [16].

Результаты исследования

Таким образом, осуществлена постановка задачи линейного программирования, представлено ее решение графоаналитическим методом с привлечением программного кода среды MATLAB для построения графика и специального кода linprog для основного решения задачи.

При решении задач линейного программирования, в которых рассматривается оптимальное расходование ресурсов, возникает проблема качества плана, состоящая в полноте использования наличных ресурсов и степени пропорциональности планируемых остатков ресурсов их располагаемому наличию [17].

При решении задачи получилось, что не все ресурсы будут использованы. Подставляя полученные объемы раствора в ограничения по ресурсам, определяем их плановое потребление. В табл. 2 показаны количества неиспользованных ресурсов и процент их использования.

В качестве оценки пропорциональности в источнике [17] предлагается использовать показатель структурных сдвигов:

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(d_i - d_{i,0}\right)^2}{m}}, \qquad (1)$$

где d_i, $d_{i,o}$ – удельный вес отдельных видов ресурсов в общем объеме их наличия и планируемого потребления соответственно, $i = 1 \ldots m$.

Далее в источнике [17] предлагается показатель эффективности плановых расчетов:

$$E_{pr} = S / \frac{\sum_i b_{i,o}}{\sum_i b_i}, \qquad (2)$$

где $\sum_i b_i$ – суммарный объем располагаемых ресурсов; $\sum_i b_{i,o}$ – планируемый объем их использования.

По минимуму этого показателя оценивается план использования располагаемых ресурсов, то есть лучшему оцениваемому варианту плана соответствует меньший по цифровому значению показатель E_{pr}.

Для определения показателя эффективности плановых расчетов в табл. 3 представлены его составляющие.

```
>> f=[-1952 -1384];
A=[2 4;8 6;40 20];
b=[105 245 1000];
Aeq=[1 -2];
Beq=0;
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,Beq,[],[])
Optimization terminated.
x=
 20.0000
 10.0000
fval=
 -5.2880e+04
```

Рис. 3. Код решения оптимизационной задачи линейного программирования с использованием команды linprog

Fig. 3. The code for solving the linear optimization problem using the linprog command

Таблица 2

Характеристика использования ресурсов

Table 2

Description of the resources use

Вид ресурса	Остаток ресурса, кг	Планируемая доля ресурса, %	Объем ресурса, кг	Планируемый объем ресурса
Биополимер	5	95,2	105	100
Полимер	45	81,6	245	200
Ингибитор	200	80	1000	800
Общий объем ресурсов	–	–	1350	1100

Таблица 3

Расчет составляющих показателя эффективности плана

Table 3

Calculation of the plan effectiveness index components

Вид ресурса	Удельный вес ресурса	Удельный вес планируемого ресурса	Суммарный объем располагаемого ресурса	Планируемый объем располагаемого ресурса	Разность удельного веса
Биополимер	0,078	0,074	105	100	0,004
Полимер	0,181	0,148	245	200	0,033
Ингибитор	0,741	0,593	1000	800	0,148

Подставив соответствующие значения из табл. 3 в формулу (1), получим

$$S = 0{,}051.$$

Подставив значения из табл. 3 в формулу (2), получим

$$E_{pr} = 0{,}0626.$$

Таким образом, показатель качества плана оказался хуже по сравнению с показателями планов, рассматриваемых в источнике [17], (0,38–0,42). Улучшая структуру первоначальных ресурсов путем уменьшения каждого хотя бы на 4 % (100,8; 230,2; 960), получаем E = 0,4, что значительно улучшает качество плана. Однако лучшей структурой ресурсов было бы уменьшение первого на 4 %, остальных – на 20 %.

Заключение

Решение задач оптимизации методами линейного программирования в сфере бурения скважин возможно благодаря развитому математическому аппарату, чувствительности анализа модельного решения задачи и более широкому использованию вычислительной техники.

Библиографический список

1. Sallan J.M., Lordan O., Fernandez V. Modeling and solving linear programming with R. Catalonia: Universitat Politècnica de Catalunya, 2015. 108 p.

2. Vanderbei R.J. Linear programming: foundations and extensions. New York: Springer, 2014. 414 p.

3. Luenberger D.G., Ye Y. Linear and nonlinear programming. New York: Springer, 2008. 541 p.

4. Rao S.S. Engineering optimization: theory and practice. Hoboken: Wiley, 2009. 813 p.

5. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования / пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 416 с.

6. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике / пер с англ. В 2 кн. Кн. 1. М.: Мир, 1986. 349 с.

7. Данциг Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / пер с англ. М.: Прогресс, 1966. 603 с.

8. Bornemann F. Numerical linear algebra: a concise introduction with MATLAB and Julia. Cham: Springer, 2018. 157 p.

9. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.

10. Банди Б. Основы линейного программирования / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

11. Уайлд Д. Оптимальное проектирование / пер. с англ. М.: Мир, 1981. 272 с.

12. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 1998. 176 с.

13. Кульневич А.Д. Линейное программирование // Молодой ученый. 2017. № 10. С. 29–32.

14. Бородин Г.А., Титов В.А., Маслякова И.Н. Использование среды MatLab при решении задач линейного программирования // Фундаментальные исследования. 2016. № 11-1. С. 23–26.

15. Рыкин О.Р. Линейное программирование в Матлабе. Универсальные линпрогоптимизаторы: производительность и табличный формат результата. Задания и задачи: монография. СПб.: Изд-во СПбПУ, 2016. 208 с.

16. Дьяконов В.П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. М.: ДМК Пресс, 2010. 976 с.

17. Карганов С.А. Решение задач линейного проектирования методов структурной оптимизации // Управление экономическими системами. 2012. № 7 (43) [Электронный ресурс]. URL: http://uecs.ru/uecs43-432012/item/1443-2012-07-13-06-59-58 (02.12.2019).

References

1. Sallan JM, Lordan O, Fernandez V. *Modeling and solving linear programming with R*. Catalonia: Universitat Politècnica de Catalunya; 2015. 108 p.

2. Vanderbei RJ. *Linear programming: foundations and extensions*. New York: Springer; 2014. 414 p.

3. Luenberger DG, Ye Y. *Linear and nonlinear programming*. New York: Springer, 2008. 541 p.

4. Rao SS. *Engineering optimization: theory and practice*. Hoboken: Wiley; 2009. 813 p.

5. Liu B. Theory and practice of indefinite programming, 2005, 416 p. (Russ. ed.: *Teoriya i praktika neopredelennogo programmirovaniya.* Moscow: BINOM. Laboratoriya znanii; 2005. 416 p.)

6. Rekleitis G, Reivindran A, Regsdel K. Optimization in technology, 1986, 349 p. (Russ. ed.: *Optimizatsiya v tekhnike*. In 2 books. Book 1. Moscow: Mir; 1986. 349 p.)

7. Dantzig GB. Linear programming: applications and generalizations, 1966, 603 p. (Russ. ed.: *Lineinoe programmirovanie, ego primeneniya i obobshcheniya.* Moscow: Progress; 1966. 603 p.)

8. Bornemann F. *Numerical linear algebra: a concise introduction with MATLAB and Julia*. Cham: Springer; 2018. 157 p.

9. Demidovich BP, Maron IA. *Fundamentals of computational mathematics*. Moscow: Nauka; 1966. 664 p. (In Russ.)

10. Bunday BD. Basic linear programming, 1989, 176 p. (Russ. ed.: *Osnovy lineinogo programmirovaniya.* Moscow: Radio i svyaz'; 1989. 176 p.)

11. Wilde DJ. Optimal design, 1981, 272 p. (Russ. ed.: *Optimal'noe proektirovanie.* Moscow: Mir; 1981. 272 p.)

12. Vasil'ev FP, Ivanitskii AYu. *Linear programming*. Moscow: Faktorial; 1998. 176 p. (In Russ.)

13. Kul'nevich AD. Linear programming. *Molodoi uchenyi*. 2017;10:29–32. (In Russ.)

14. Borodin GA, Titov VA, Maslyakova IN. Solving linear programming problems with MatLab. *Fundamental'nye issledovaniya*. 2016;11-1:23–26. (In Russ.)

15. Rykin OR. *Linear programming in Matlab. Multipurpose linprog optimizers: capacity and a table format of the result. Target and problems*. Saint Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; 2016. 208 p. (In Russ.)

16. D'yakonov VP. *MATLAB and SIMULINK for radio engineers*. Moscow: DMK Press; 2010. 976 p. (In Russ.)

17. Karganov SA. Solving of linear programming by method of structural optimization. *Management of Economic Systems.* 2012;7. Available from: http://uecs.ru/uecs43-432012/item/1443-2012-07-13-06-59-58 [Accessed 2nd December 2019]. (In Russ.)

Критерии авторства / Authorship criteria

Ламбин А.И. написал статью, имеет на нее авторские права и несет ответственность за плагиат.
Anatoly I. Lambin is the author of the article, holds the copyright and bears responsibility for plagiarism.

Конфликт интересов / Responsibility for plagiarism

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
The author declares that there is no conflict of interest regarding the publication of this article.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
The author has read and approved the final version of this manuscript.

2020;43(1):88–95

Сведения об авторе / Information about the author

Ламбин Анатолий Иванович,
кандидат технических наук,
доцент кафедры нефтегазового дела,
Институт недропользования,
Иркутский национальный исследовательсий технический университет,
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия,
✉ e-mail: alambin@ex.istu.edu
Anatoly I. Lambin,
Cand. Sci. (Eng.),
Associate Professor, Oil and Gas Department,
Institute of Subsoil Use,
Irkutsk National Research Technical University,
83 Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia,
✉ e-mail: alambin@ex.istu.edu